7/5/18

Έστω $f: E \to E$ ένας ενδομορφισμός του Ευκλείδειο χώρου $(E, <,>)$ όπου $\dim_{\mathbb{R}} E < \infty$. Σταθεροποιούμε ένα τυχόν διάνυσμα $\vec{y} \in E$ και ορίζουμε απεικόνιση $\varphi_{\vec{y}}: E \to \mathbb{R}$, $\varphi_{\vec{y}}(\vec{x}) = < f(\vec{x}), \vec{y} >$

Η $\varphi_{\vec{y}}$ είναι γραμμική, διότι: $\varphi_{\vec{y}}(\vec{x_1} + \vec{x_2}) = < f(\vec{x_1} + \vec{x_2}), \vec{y} >$

$= < f(\vec{x_1}) \underset{\beta}{+} f(\vec{x_2}), \vec{y} > = < f(\vec{x_1}), \vec{y} > + < f(\vec{x_2}), \vec{y} > =$

$= \varphi_{\vec{y}}(\vec{x_1}) + \varphi_{\vec{y}}(\vec{x_2})$

και: $\varphi_{\vec{y}}(\lambda \cdot \vec{x}) = < f(\lambda \cdot \vec{x}), \vec{y} > = < \lambda f(\vec{x}), \vec{y} > =$
$= \lambda \varphi_{\vec{y}}(\vec{x})$

Από το ΛΗΜΜΑ του Riesz, έπεται ότι υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $\vec{v} \in E$ (το οποίο εξαρτάται από το $\vec{y}$, και τον f) έτσι ώστε:
$\varphi_{\vec{y}}(\vec{x}) = < \vec{x}, \vec{v} >$, δηλαδή: $< f(\vec{x}), \vec{y} > = < \vec{x}, \vec{v} >$ (*)

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δεδομένου του τυχόντος διανύσματος $\vec{y} \in E$ και του ενδομορφισμού $f: E \to E$, το μοναδικό διάνυσμα $\vec{v}$ έτσι ώστε να ισχύει η σχέση (*) θα συμβολίζεται με $f^*(\vec{y})$

Έτσι έχουμε ορίσει μια απεικόνιση:
$f^*: E \to E$, $\vec{y} \longmapsto f^*(\vec{y}) =$ το μοναδικό διάνυσμα έτσι ώστε: $\boxed{\forall \vec{x} \in E: < f(\vec{x}), \vec{y} > = < \vec{x}, f^*(\vec{y}) >}$

(**)

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: Η απεικόνιση $f^*: E \to E$ είναι γραμμική

Έστω $\vec{y_1}, \vec{y_2} \in E$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

(**) $\langle f(\vec{x}), \vec{y_1} + \vec{y_2} \rangle = \langle \vec{x}, f^*(\vec{y_1} + \vec{y_2}) \rangle =$

$$= \langle f(\vec{x}), \vec{y_1} \rangle + \langle f(\vec{x}), \vec{y_2} \rangle \overset{(**)}{=} \langle \vec{x}, f^*(\vec{y_1}) \rangle + \langle \vec{x}, f^*(\vec{y_2}) \rangle =$$

$$= \langle \vec{x}, f^*(\vec{y_1}) + f^*(\vec{y_2}) \rangle \quad \forall \vec{x} \in E$$

$$\Rightarrow f^*(\vec{y_1} + \vec{y_2}) = f^*(\vec{y_1}) + f^*(\vec{y_2})$$

(**) $\Rightarrow \langle f(\vec{x}), \lambda \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, f^*(\lambda \vec{y}) \rangle$

$$\lambda \langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle \overset{(**)}{=} \lambda \langle \vec{x}, f^*(\vec{y}) \rangle = \langle x, \lambda f^*(\vec{y}) \rangle \quad \forall \vec{x} \in E$$

$$\Rightarrow f^*(\lambda \cdot \vec{y}) = \lambda f^*(\vec{y})$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Αν $(E, \langle , \rangle)$ είναι Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και $f: E \to E$ είναι ένας ενδομορφισμός του E, τότε ο ενδομορφισμός $f^*: E \to E$ καλείται ο προσαρτημένος (συζυγής) ενδομορφισμός του f. Ο ενδομορφισμός f καλείται αυτοπροσαρτημένος (αυτοσυζυγής) $\Leftrightarrow f^* = f$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $f: E \to E$ ένας ενδομορφισμός του E, έστω $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}\}$: ΟκΒ του E, και έστω $f^*: E \to E$ ο προσαρτημένος του f. Τότε: $\boxed{M_B^B(f^*) = {}^t M_B^B(f)}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω $A = (a_{ij}) = M_B^B(f)$ και $B = M_B^B(f^*) = (b_{ij})$

$$f(\vec{e_j}) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \vec{e_k} \quad \text{και} \quad f^*(\vec{e_i}) = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} \vec{e_k}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

$$\langle f(\vec{e_j}), \vec{e_i} \rangle \overset{(*)}{=} \langle \vec{e_j}, f^*(\vec{e_i}) \rangle = \langle \vec{e_j}, \sum_{k=1}^{n} b_{ki} \vec{e_k} \rangle = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} \langle \vec{e_j}, \vec{e_k} \rangle = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} \delta_{jk} = b_{ji}$$

$$\langle f(\vec{e_j}), \vec{e_i} \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \vec{e_k}, \vec{e_i} \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \langle \vec{e_k}, \vec{e_i} \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \delta_{ki} = a_{ij}$$

Δηλ. $a_{ij} = b_{ji}$

Άρα: $\forall i, j = 1, \dots, n: a_{ij} = b_{ji} \Rightarrow A = {}^t B \Rightarrow M_B^B(f) = {}^t M_B^B(f^*) \Rightarrow M_B^B(f^*) = {}^t M_B^B(f)$

ΠΟΡΙΣΜΑ: Ο ενδομορφισμός f είναι αυτοπροσαρτημένος δηλαδή $f^* = f \Leftrightarrow$ ο πίνακας του f σε μια ΟκΒ είναι συμμετρικός.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: "$\Rightarrow$" Αν $f^* = f$, τότε από το ΘΕΩΡΗΜΑ: $M_B^B(f) = {}^t M_B^B(f) \Rightarrow$ ο $M_B^B(f)$: συμμετρικός

"$\Leftarrow$" Έστω ότι ο πίνακας $A = M_B^B(f)$ σε μια ΟκΒ είναι συμμετρικός $\Rightarrow {}^t M_B^B(f) = M_B^B(f)$
ΘΕΩΡΗΜΑ $\Rightarrow {}^t M_B^B(f) = M_B^B(f^*)$ $\Bigg| \Rightarrow$
$\Rightarrow M_B^B(f^*) = M_B^B(f) \Rightarrow f^* = f$

$\Rightarrow$

Υπενθύμιση από Γραμ. 1 : $\mathcal{L}(E,E) \to M_n(\mathbb{R})$ είναι
$f \longmapsto M_B^B(f)$ ισομορφισμός
$\mathbb{R}$-δ.χ. $\Rightarrow$

B: βάση του E
$\Rightarrow M_B^B(f) = M_B^B(g) \Rightarrow \underline{f = g}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x+2y, 2x+y)$
$B = \{\vec{e_1} = (1,0), \vec{e_2} = (0,1)\}$: ΟΚΒ

$$\left.\begin{aligned} f(\vec{e_1}) &= f(1,0) = (1,2) = 1\cdot\vec{e_1} + 2\cdot\vec{e_2} \\ f(\vec{e_2}) &= f(0,1) = (2,1) = 2\cdot\vec{e_1} + 1\cdot\vec{e_2} \end{aligned}\right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$: συμμετρικός
$\Rightarrow f = f^*$

2 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x+3y, 2x+y)$

$$\left.\begin{aligned} f(\vec{e_1}) &= f(1,0) = (1,2) = 1\cdot\vec{e_1} + 2\vec{e_2} \\ f(\vec{e_2}) &= f(0,1) = (3,1) = 3\cdot\vec{e_1} + 1\cdot\vec{e_2} \end{aligned}\right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ δεν είναι συμμετρικός $\Rightarrow$
$\Rightarrow f^* \neq f$

Όμως $M_B^B(f^*) = {}^tM_B^B(f) = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$f^*(x,y) = (x', y')$, όπου $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} x+2y \\ 3x+y \end{pmatrix} \Rightarrow f^*(x,y) = (x+2y, 3x+y)$

(3) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x+3y+6z, 3x+2y-z, 6x-y+4z)$

$B = \{\vec{e_1} = (1,0,0), \vec{e_2} = (0,1,0), \vec{e_3} = (0,0,1)\}$: ΟΚΒ

$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$: συμμετρικός $\Rightarrow f^* = f$

(4) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (2x+y+4z, 3x+3z, 4x+2y+z)$

$B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$: κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$, η οποία είναι ΟΚΒ.

$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ δεν είναι συμμετρικός $\Rightarrow$ $\Rightarrow f^* \neq f$

Όμως $M_B^B(f^*) = {}^tM_B^B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $f^*(x,y,z) = (x', y', z')$, όπου:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y+4z \\ x+2z \\ 4x+3y+z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f^*(x,y,z) = (2x+3y+4z, x+2z, 4x+3y+z)$

$(E, <,>)$: Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, και $f: E \to E$ ενδομορφισμός

① $f^*: E \to E$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$\boxed{\langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, f^*(\vec{y}) \rangle, \forall \vec{x}, \vec{y} \in E} \quad (**)$$

② Αν B: ΟΚΒ του E, τότε:

$$\boxed{M_B^B(f^*) = {}^t M_B^B(f)}$$

③ $f^* = f \Leftrightarrow M_B^B(f)$: συμμετρικός

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ και θεωρούμε τον ενδομορφισμό $f_A: \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_n$, $f_A(X) = A \cdot X$. Τότε:
$\langle A \cdot X, Y \rangle = \langle X, {}^tA \cdot Y \rangle$

$(**) \Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}_n: \langle f_A(X), Y \rangle = \langle X, f_A^*(Y) \rangle \Rightarrow$
$\Rightarrow \langle A \cdot X, Y \rangle = \langle X, f_A^*(Y) \rangle$

$B = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$: η συνήθης βάση του $\mathbb{R}_n$ η οποία είναι ΟΚΒ

Τότε: $\boxed{M_B^B(f_A) = A}$

Επομένως από την ② $\Rightarrow M_B^B(f_A^*) = {}^t M_B^B(f_A) = {}^tA$.
Τότε: $\forall X \in \mathbb{R}_n: f_A^*(X) = X' = M_B^B(f_A^*) \cdot X = {}^tA \cdot X \Rightarrow$
$\Rightarrow \boxed{f^*_A = f_{{}^tA}}$